УДК 539.3:534.1

О КИНЕМАТИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ТИПА СТЕРЖНЯ КАК СЛЕДСТВИЕ ПРОЦЕССОВ ЦИРКУЛЯЦИИ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН ПРОДОЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

А.И. Саченко*

*ГОСНИТИ (г. Москва)

Показано, что причиной движения деформируемого твердого тела (ДТТ) при воздействии силы на его поверхность является последовательный массоперенос, осуществляемый осциллирующим волновым полем, которое описывается волновыми функциями скорости, плотности импульса и напряжения.

It is shown, that the cause of the deformed solid body motion under the power influence on its surface is the seguential mass transportation, carried out by oscillating wave field, which is described by wave functions of speed, impulse and pressure density.

В настоящее время накоплен значительный материал теоретического и экспериментального характера по вопросам эволюции уединенных волн в деформируемых твердых телах, в том числе и уединенных волн продольной деформации (УВПД) [1 – 8]. Однако работ по кинематическим аспектам движения деформируемых твердых тел типа стержня (в дальнейшем ДТТ), когда кинематические аспекты рассматриваются, как следствие процесса эволюции УВПД в ДТТ, в научной литературе представлено достаточно мало и, в основном, это касается отдельных замечаний на фоне чисто волновой проблематики, когда ДТТ рассматривается скорее как волновод [7 – 12].

Аргументом актуальности изучения кинематических аспектов ДТТ, рассматриваемых как следствие процесса эволюции УВПД является то, что при генерировании УВПД и последующем изучении процесса эволюции УВПД в ДТТ, фактически исследуется «анатомия» процесса возникновения и продолжения движения ДТТ, как физического объекта, к примеру, свободного движения, или движения с ускорением [13 – 14]. В результате такие традиционные понятия, как сила, скорость движения, ускоренное движение, свободное движение или движение по инерции уже находят более широкую трактовку. Актуальность таких исследований, на наш взгляд, так же обусловлена современными разработками новых технологий, основанных на нестационарных, нелинейных и высокоскоростных процессах в сплошных средах, к примеру, в стержневых системах, когда, наряду с аналитическими уравнениями, описывающими механику процесса движения, необходимо учитывать переходные ударно-волновые процессы в стержнях.

Данная работа направлена на исследование кинематических аспектов движения ДТТ, рассматриваемых как следствие процесса циркуляции УВПД в ДТТ. Показано, что условие равномерного и прямолинейного свободного движения физического тела типа стержня является частным случаем свободного движения. В работе вводится понятие «трансляционных» переменных. Так же показано, что движение стержня под действием постоянной силы, приложенной к торцу, описывается параболическим уравнением только в «трансляционных» переменных.

В данной работе рассматриваются УВПД в однородном изотропном линейно-упругом ДТТ типа длинного тонкого стержня постоянного сечения.

Как известно, уединенная волна является нелинейной длинной локализованной волной, бегущей по поверхности раздела сред (уединенная волна возвышения или внутренняя волна) либо внутри волновода (уединенная волна плотности). Эти волны могут распространяться на большие расстояния и переносить энергию и импульс без искажения в течение длительного времени. Иногда такие волны, распространяющиеся без искажений, называют волнами стационарного профиля [8,15]. В данной работе УВПД рассматривается как уединенная волна стационарного профиля, не учитывается дисперсия и нелинейные процессы, возникающие при наложении УВПД. Рассмотрение эволюции УВПД в ДТТ ведется в пределах технической теории Бернулли [9]. При описании процессов эволюции УВПД используется точка зрения Эйлера.

I. Описание кинематических аспектов свободного движения ДТТ как следствие процессов эволюции уединенных волн продольной деформации

Введём неподвижную декартову систему координат (Эйлеровы координаты) с осями OU_i (где $u=u_1$) и сопутствующую «вмороженную» в ДТТ декартову систему координат (лагранжевы координаты) с осями OX_i (где $x=x_1, y=x_2, z=x_3$), коллинеарную (по индексу i) системе OU_i. ДТТ представляет собой свободный длинный тонкий стержень длиной ℓ и постоянным сечением F. Для упрощения считаем, что в ДТТ сгенерирована УВПД длиной равной или меньшей ℓ. Рассматривается случай малых деформаций и малых скоростей деформаций. Напомним основные предположения, принятые в технической теории Бернулли [9]:

– любая точка, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси стержня (OX), имеет одинаковые перемещения (гипотеза плоских сечений):

$$u(x,y,z,t) = u(x,t); \quad (1)$$

– выполняются условия одноосного деформируемого состояния:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ или } \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = -\nu \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2)$$

где ν – коэффициент Пуассона;

– поперечные напряжения равны нулю

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0. \quad (3)$$

Из соотношения (1, 2) путем интегрирования по поперечным координатам найдем перемещения $u_{2,3}$:

ISBN 5 – 9296 – 0198 – 4

$$u_2(x,y,t) = -\nu \cdot y \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\ u_3(x,z,t) = -\nu \cdot z \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (4)$$

а так же функции скорости и напряжения:

$$\upsilon(x,z,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial t} = -\nu \cdot y \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}, \frac{\partial \mathrm{u}_3}{\partial t} = -\nu \cdot z \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}, \quad (5)$$

$$\sigma(x,t) = E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \sigma_{12} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} = -\mu \cdot \nu \cdot y \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} = -\mu \cdot \nu \cdot z \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

где E – модуль Юнга, μ – модуль сдвига.

Функции $u(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$, а так же соответствующие функции скорости и напряжения (5) являются волновыми функциями, зависящими от координаты x и времени t. Эволюция УВПД в ДТТ заключается в циркуляции УВПД по длине ДТТ с отражением от соответствующих свободных торцов ДТТ. В процессе отражения УВПД от свободных торцов ДТТ будут происходить наложения падающей и отраженной частей УВПД. Для упрощения будем считать, что в момент $t = t_i$ наложение падающей и отраженной частей УВПД отсутствует и УВПД расположена на отрезке от $x = 0$ до $x = x \leq \ell$. Запишем для этого момента времени кинетическую и потенциальную энергии УВПД в стержне. Кинетическую энергию УВПД определим по формуле:

$$W^B{}_K = \frac{1}{2}\rho \cdot \int_0^x \iint_F \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2 \right] dFdx = \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2}\rho \cdot \int_0^x \left[F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \nu^2 \mathrm{I}_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)^2 \right] dx,$$

где ρ – плотность материала, F – площадь поперечного сечения стержня, верхний предел интегрирования $x \le \ell$, $\mathrm{I}_0 = \iint_F \left(y^2 + z^2\right) dF$ – полярный момент инерции сечения.

Первое слагаемое описывает продольную, второе – поперечную составляющую кинетической энергии УВПД.

Потенциальную энергию УВПД определим по формуле:

$$W^B{}_\Pi = \frac{1}{2}\int_0^x \iint_F \left[\left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 + \left(\frac{\sigma^2{}_{12} + \sigma_{13}{}^2}{\mu}\right)^2 \right] dF dx = \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2} EF \cdot \int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu \nu^2 \mathrm{I}_0 \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx,$$

где верхний предел интегрирования $x \le l$.

Первое слагаемое описывает потенциальную энергию продольной составляющей, второе – потенциальную энергию поперечной составляющей УВПД.

Используем дополнительные предположения, принятые в технической теории продольных колебаний стержней [9]:

– предполагается, что вклад в кинетическую энергию УВПД, относящийся к поперечному движению частиц стержня, пренебрежимо мал:

$$\nu^2 \mathrm{I}_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)^2 \approx 0;$$

– пренебрегаем касательными напряжения:

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 ,$$

следовательно, вклад в потенциальную энергию УВПД, описываемый сдвиговыми (поперечными) деформациями, также не учитывается:

$$\mu \nu^2 \mathrm{I}_0 \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 = 0 .$$

Тогда волновые функции смещения, скорости и напряжения будут иметь только продольные составляющие:

$$u\,(x\,,\,t\,);\;\upsilon\,(x\,,\,t\,);\;\sigma\,(x\,,\,t\,)\,. \quad (8)$$

Запишем функцию Лагранжа для УВПД для того же момента времени $t = t_i$

$$L_B(t) = W^B{}_K - W^B{}_\Pi = \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2}\rho \cdot F \int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EF \cdot \int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = F \int_0^x \left(\frac{\rho}{2} \upsilon^2(x,t) - \frac{1}{2E} \sigma^2(x,t) \right) dx .$$

Как известно, полная энергия УВПД, равная работе затраченной на генерирование УВПД и состоящая из суммы потенциальной и кинетической энергий, остается постоянной. При этом волновая функция напряжения полностью определяет потенциальную энергию, а волновая функция скорости – кинетическую энергию волнового поля УВПД.

В процессе циркуляции в результате наложений падающей и отраженной частей УВПД при отражении от свободных поверхностей (торцов), соотношения между потенциальной и кинетической энергиями в УВПД меняются и циклически повторяются в соответствии с периодом циркуляции УВПД по длине ДТТ, равным

ISBN 5 – 9296 – 0198 – 4 © Северо-Кавказский государственный технический университет, **http://www.ncstu.ru**

$$T = \frac{2 \cdot \ell}{a}, \ (10)$$

где a – скорость циркуляции УВПД в ДТТ, равная скорости звука в ДТТ.

Это связано с тем, что волновые функции скорости и напряжения, описывающие УВПД, имеют разные законы отражения [13 – 14].

Как известно, в процессе циркуляции УВПД в ДТТ осуществляется последовательный массоперенос и, в конечном счете, перемещение в пространстве ДТТ, как физического тела [13,14,16,17]. При этом соотношения между кинетической и потенциальной энергией в УВПД в соответствии с циркуляцией УВПД будет повторяться помимо временного периода T и с пространственным периодом:

$$\Delta u = T \cdot \langle \upsilon(x,t) \rangle, \ (11)$$

где $\langle \upsilon(x,t) \rangle$ – средняя скорость перемещения сечения $x = x_i \subset ДТТ$ за период Т, равная

$$\langle \upsilon(x,t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \upsilon(x,t) dt \ . \ (12)$$

То есть при свободном движении ДТТ имеет место временная и пространственная периодичность. Назовем периоды по времени Т и расстоянию (пространству) Δu периодами «трансляции». Если за начало отсчета взять любой момент времени $t = t_0$ и соответственно координату $u(x_i, t_0)$, тогда «трансляционные координаты» будут

$$t_k = t_0 + k \cdot T \text{ и } u_k = u(x_i, t_0) + k \cdot \Delta u \ , \ (13)$$

где $k = 0,1,2,3...$.

ISBN 5 – 9296 – 0198 – 4

В работах [16 – 17] рассмотрены кинематические аспекты циркуляции УВПД в ДТТ, при этом УВПД представлена, соответственно, как детерминированный и стационарный стохастический процесс. Показано, что при усреднении функции Лагранжа УВПД (9) по временному периоду Т, мы получаем известную из аналитической механики функцию Лагранжа для описания движения центра масс твердого тела. При этом функция Лагранжа задается в «трансляционных» координатах:

$$\frac{1}{T}\int_0^T L_B(t)dt = \frac{1}{2}m\left\langle \upsilon(x,t)\right\rangle^2 = L_{ДТТ}(t_k,u_k). \quad (14)$$

Поскольку функция Гамильтона описывает полную энергию системы, то при усреднении функции Гамильтона УВПД $-H_B(t)$ по временному периоду Т получена известная из аналитической механики функция Гамильтона для описания движения центра масс твердого тела и плюс, усредненная сумма ΔW осциллирующих частей потенциальной и кинетической энергии УВПД, которая «не участвует» в процессе движения ДТТ [16–17]. При этом работа, затраченная на генерирование УВПД, и, соответственно, полная энергия УВПД, больше чем кинетическая энергия движения ДТТ [7,13,14,18] (то есть, здесь речь идет об эффективности передачи энергии от одного тела к другому в процессе удара, что важно при разработке соответствующих технологических процессов, к примеру, в горной механике [18]). Функция Гамильтона так же определена в «трансляционных» » координатах:

$$\frac{1}{T}\int_0^T H_B(t)dt = \frac{1}{2}m\left\langle \upsilon(x,t)\right\rangle^2 + \Delta W = H_{ДТТ}(t_k,u_k) + \Delta W \quad . (15)$$

Таким образом

$$L_{ДТТ}(t_k,u_k),\ H_{ДТТ}(t_k,u_k) \text{ и } \upsilon_{ДТТ}(x,t_k)$$

ISBN 5 – 9296 – 0198 – 4

являются функциями, определенными в «трансляционных» переменных t_k и u_k.

Для получения уравнения движения ДТТ в «трансляционных» координатах, запишем действие для ДТТ по Гамильтону с функцией Лагранжа $L_{ДТТ}(t_k, u_k)$ и применим вариационный принцип Гамильтона-Остроградского. При этом варьирование будем производить по переменной времени от t_k до t_{k+n}, где (n=1,2,3,…)

$$\delta S = \int_{t_k}^{t_{k+n}} \delta \left(L_{ДТТ} \left(t_k \right) \right) \cdot dt_k . \quad (16)$$

В результате получим уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt_k} \frac{\partial L_{ДТТ}}{\partial \upsilon_{ДТТ}} - \frac{\partial L_{ДТТ}}{\partial u_k} = 0 . \quad (17)$$

Дифференцируя и интегрируя, получим

$$\frac{d}{dt_k} \upsilon_{ДТТ}(t_k, x) = 0 , \ \upsilon_{ДТТ} \left(x, t_k \right) = C = const \ .$$

Постоянную C определим в «трансляционных» переменных, учитывая, что усредненная величина скорости определяется за интервал времени от $t_0 = 0$ до $t_1 = T$

$$C = \upsilon_{ДТТ} \left(x, t_1 \right) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_1} \upsilon \left(x, t \right) dt = \left\langle \upsilon \left(x, t \right) \right\rangle . \quad (18)$$

Тогда

ISBN 5 – 9296 – 0198 – 4

$$\upsilon_{ДТТ}(x, t_k) = \upsilon_{ДТТ}(x, t_1).$$

Из $\frac{d}{dt_k} u_{ДТТ}(x, t_k) = \upsilon_{ДТТ}(x, t_1)$

получаем

$$u_{ДТТ}(x, t_k) = \upsilon_{ДТТ}(x, t_1) \cdot t_k + u(x, t_0), \quad (19)$$

где $u(x, t_0)$ – начальные положение сечения $x = x_i \subset ДТТ$ в момент $t_0 = 0$, $k = 0,1,2,3\ldots$.

Отметим, что множество ДТТ будут иметь тождественные уравнения движения (19) в «трансляционных» переменных, если усредненные за период T функции Лагранжа (14) будут равны. Хотя при этом вид волновых функций (8) может существенно различаться. При разложении этих функций в ряд Фурье в сечении $x = x_i \subset ДТТ$ они будут отличаться только видом амплитудно-частотного спектра при равенстве постоянных составляющих. При этом в промежутки времени меньшие периода циркуляции T движения сечений $x = x_i \subset ДТТ$ могут значительно отличаться.

Замечания

1.Заметим, что формально процесс свободного движения ДТТ в «трансляционных» переменных напоминает волновой процесс, а точнее, состоит из двух волновых процессов. Первый – это УВПД, имеющая скорость a циркуляции в ДТТ, которую для более полной аналогии с соответствующим описанием в квантовой механике [19 – 20] назовем фазовой скоростью. Второй – это волновой процесс движения самого ДТТ. Для более подробного рассмотрения перейдем к переменным Лагранжа. Свяжем с движением сечения $x = x_i \subset ДТТ$ некую волновую функцию $\phi(x,t)$. И пусть эта функция имеет период T и длину волны $\lambda = \Delta u$, тогда $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $k = \frac{2\pi}{\Delta u}$ и можно записать

ISBN 5 – 9296 – 0198 – 4

$$\phi(x,t)=\phi(\omega\cdot t-k\cdot x).$$

Скорость движения ДТТ и, соответственно, волновой функции $\phi(x,t)$ в «трансляционных» переменных», так же по аналогии, назовем групповой скоростью:

$$\vartheta_{\text{Ãðóï}} = \frac{\omega}{k} = \upsilon_{ДТТ}\ (x, t_k\,).$$

Причем фазовая скорость циркуляции УВПД намного больше групповой скорости $a >> \vartheta_{Груп}$.

2. Анализ полученных вариантов свободного движения (или движения по инерции) ДТТ позволяет сделать заключение, что у движения по инерции, кроме известного «прямолинейного и равномерного движения», существует еще «прямолинейное и равномерное» движение в «трансляционных» переменных. И в первом случае и во втором причиной свободного движения ДТТ является циркулирующая УВПД, которая может описываться только волновыми функциями скорости (для первого случая движения по инерции) или волновыми функциями скорости и напряжения (для второго случая движения по инерции) [13 – 14]. При этом первый случай движения по инерции является частным случаем второго вида движения по инерции.

II. Кинематические аспекты ускоренного движения ДТТ как следствие процессов циркуляции уединенных волн продольной деформации

Как показано в работе [14], при описании ускоренного движения ДТТ под действием постоянной силы, приложенной к торцу стержня, так же имеет место аналогичный процесс «трансляций», но с существенным отличием. УВПД здесь генерируется непрерывно постоянно действующей силой, как бы «наматываясь» на стержень. Это приводит к таким особенностям, что в моменты времени, кратные периоду циркуляции $t = t_k = k\cdot T$ $(k = 0,1,2,3...)$, вся

ISBN 5 – 9296 – 0198 – 4

энергия УВПД становится кинетической, а потенциальная энергия УВПД равна нулю. В эти моменты времени скорость всех лагранжевых координат $x = x_i \subset ДТТ$ будет равна [14]:

$$\upsilon_{ДТТ}(x, t_k) = a(kT) = a \cdot t_k\ ,\ a = \frac{2}{T^2}\int_{t_0}^{t_1}\upsilon(0, t)dt\ ,$$

где $t_0 = 0\ ,\ t_1 = T$.

Причем скорость лагранжевых координат $x = x_i \subset ДТТ$ нарастает дискретно и эти изменения индивидуальны для каждой лагранжевой координаты [14].

Для получения уравнения движения ДТТ в «трансляционных» координатах, поступим аналогично как для свободного движения, оставляя в стороне особенности изменения скорости лагранжевых координат ДТТ в промежутки времени меньшие периода циркуляции. И в итоге получим:

$$u_{ДТТ}(x, t_k) = \frac{(a \cdot t_k{}^2)}{2} + u(x, t_0),$$

где $u(x, t_0)$ – начальные положение сечения $x = x_i \subset ДТТ$ в момент $t_0 = 0$, $k = 0,1,2,3...$.

Отметим, что пространственная периодичность имеет нарастающий характер:

$$\Delta u = a \cdot T^2 (k - \frac{1}{2})\ ,\ k = 1,2,3...\ .$$

Кинетическая энергия так же имеет периодичный нарастающий характер:

ISBN 5 – 9296 – 0198 – 4

$$\Delta W_K^B = m \cdot (a \cdot T)^2 (k - \frac{1}{2}), \; k = 1,2,3\ldots.$$

Таким образом, и при ускоренном движении ДТТ имеет место временная и пространственная периодичность.

Отметим, что объяснение движения ДТТ, как следствие последовательного массопереноса в процессе циркуляции УВПД [13 – 14,16 – 17] в ДТТ, фактически предсказано Луи де Бройлем еще в 1951 году в его идее о «волне-пилоте» при попытках связать волновые свойства движущихся физических тел и их локальность, а так же для описания самой причины движения физических тел [20].

Литература

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука,1966. – 421с.
2. Слеттери Дж. Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах / М.: Энергия, 1978. 448с.
3. Сагомонян А.Я. Волны напряжения в сплошных средах. М.: МГУ, 1985.
4. Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах. М., 1961. – 140 с.
5. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. М., 1955. – 192 с.
6. Алимов О.Д., Манжосов В.К., Еремьянц В.Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. М.: Наука, 1985. – 358 с.
7. Отражение солитона продольной деформации от торца нелинейно-упругого стержня. Г.В. Дрейден, А.В. Порубов, А.М. Самсонов, И.В. Семенова. Журнал технической физики, 2001. Т. 71. Вып. 5.
8. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. – 208с.
9. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела: современные концепции, ошибки и парадоксы. М.: Наука, 1985. – 288 с.
10. Абазехов М.М., Канель Г.И. Сопротивление стекла разрушению при импульсном нагружении. – Сборник научных трудов. Физико-химия межфазных явлений. Нальчик: КБГУ, 1986. – С. 250.
11. Николас Т. Поведение материалов при высоких скоростях деформации // Динамика удара. М.: Мир, 1985. – С.198 – 257.
12. Саченко А.И., Игропуло В.С. О некоторых особенностях исследования процесса движения деформируемого твердого тела под действием силы приложенной к его боковой поверхности // Вестник Ставропольского государственного университета. Ставрополь. 1997. Вып. 11. – С.89.
13. Саченко А.И. Описание ускоренного движения деформируемого твердого тела на основе волновых процессов, возникающих при воздействии постоянной силы на его поверхность (торец) // Вестник Северо-Кавказского государственного технического университета. Серия «Физико-химическая». Ставрополь: СевКавГТУ, 2003, №1(7). – С.64 – 72.
14. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка,1989. – 304 с.
15. Саченко А.И. Некоторые вопросы кинематики деформируемого твёрдого тела (на основе детерменированных волновых процессов) // Сборник научных трудов. Серия «Физико-химическая». Ставрополь: СевКавГТУ. Вып.4, 2001. – С.44 – 47.
16. Саченко А.И. Некоторые вопросы кинематики деформируемого твёрдого тела (на основе волновых процессов и с применением случайных функций). Сборник научных трудов. Серия «Физико-химическая». Ставрополь: СевКавГТУ. Вып.1, 1998. – С.63 – 68.
17. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. – 336 с.
18. Бурсиан В.Р. Волновая механика Шредингера. Основания новой квантовой механики. М.-Л.: Госиздат, 1927. – С.53 – 82.
19. Луи де Бройль. Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. Пер. с франц. М.: Мир, 1986. – 344 с.