

ОПИСАНИЕ УСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ОСНОВЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТЬ (ТОРЕЦ)

А. И. С а ч е н к о

ГОСНИТИ(РАСХН) г.Москва

Показано, что в процессе воздействия силы на поверхность деформируемого твердого тела (ДТТ) силовое воздействие на "составляющие элементы" ДТТ осуществляется волновым полем, осциллирующим в ДТТ и осуществляющим массоперенос, что и является причиной относительного движения ДТТ. При этом классическое описание движения ДТТ верно только в пределах усреднения за период осцилляции волнового поля.

It is shown, that in the process of power impact on the surface of the deforming solid body (DSB) the force impact on the «constituent elements» is implemented by wave field, which oscillates in DSB and fulfills mass transfer. This is the cause of relative movement of DSB. In this case the classical description of DSB movement is right only in limits of averaging-out for the period of wave field oscillation

Известно, что при воздействии силы на поверхность ДТТ (при рассмотрении области упругих деформаций) в нем возникает упругая волна, которую можно описывать волновыми функциями скорости, плотности импульса и деформации. При этом считается, что силовое воздействие не передается мгновенно всему ДТТ. Однако при этом процесс генерирования упругой волны и процесс движения ДТТ, как целого, рассматриваются независимо [1].

В данной работе мы исходим из того, что, как известно, при воздействии внешней силы на поверхность ДТТ в нем генерируется упругая волна или волновое поле, однако далее мы считаем, что в ДТТ нет никаких иных процессов, отвечающих за передачу импульса и дальнейшее движение ДТТ как целого – будь то свободное движение или движение под действием силы, кроме, как только волновое поле, следствием осцилляции, которого в ДТТ и является процесс движения ДТТ как целого.

Действительно, с одной стороны, в соответствии с выводами теории относительности - никакой сигнал, никакое силовое воздействие не может распространяться, передаваться со скоростью более скорости света, поскольку "информация" о том, что на одном конце ДТТ началось силовое воздействие придет на другой его конец через конечное время, которое определяется скоростью распространения волнового процесса. С другой стороны при описании процессов движения ДТТ мы придерживаемся старого понятия дальнего действия, считая, что все "составляющие элементы" ДТТ и все ДТТ, как целое, – движутся в результате передачи ДТТ импульса – будь то свободное движение или движение под действием силы, при этом, не описывая механизм передачи и дальнейшего движения.

В данной работе мы исходим из того, что сила, действующая на поверхность ДТТ, действует только в месте контакта с ДТТ, а далее движение остальных составляющих "элементов" ДТТ по всей длине "обслуживает" только волновое поле, которое в момент действия силы «отрывается» от места контакта ДТТ с действующей силой и далее продолжает самостоятельное движение-осцилляцию в ДТТ, тем самым, осуществляя перемещение в пространстве самого ДТТ. При этом, как показано в работе, именно волновое поле является носителем импульса и кинетической энергии движущегося ДТТ [3,9–13].

Данный подход базируется на большом количестве материала, накопленном в теоретических и практических работах, в частности, в физике ударных волн, в горной механике при проектировании и эксплуатации механизмов ударного действия и хорошо согласуется с результатами экспериментов [2,6,7].

Хорошо известен и описан во многих работах процесс воздействия силы на поверхность ДТТ на основе описания генерирования волнового поля и учитывающий конечность скорости распространения силового воздействия. Однако при этом рассматривается только время непосредственного воздействия

силы на ДТТ. Как только сила перестает действовать, считается, что ДТТ начинает “самостоятельное” движение как целое, как “абсолютно твердое тело” [1,5,6,7].

В дальнейшем ДТТ считается линейно упругим и однородным, пренебрегаются радиальные движения и дисперсия волн, а так же не рассматриваются нелинейные процессы, возникающие при наложении волн друг на друга. В данной работе при описании волнового поля и, соответственно, движения ДТТ с помощью волнового поля используется метод Эйлера [3,12].

1. Общие представления о применяемом волновом подходе

Введём неподвижную систему координат с осью OY и сопутствующую “вмороженную” в ДТТ систему координат с осью OX , коллинеарной оси OY [3] (рис.1а). Для описания волновых процессов в ДТТ будем использовать систему дифференциальных уравнений первого порядка с волновыми функциями скорости $V(x,t)$ и напряжения $T(x,t)$ [3]

$$\begin{cases} \rho \partial V(x,t) / \partial t = \partial T(x,t) / \partial x, \\ \partial T(x,t) / \partial t = E \partial V(x,t) / \partial x, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ и E – плотность и модуль упругости ДТТ;

$V(x,t) = \partial U(x,t) / \partial t$, $U(x,t)$ – волновая функция смещения сечений ДТТ,

$$T(x,t) = E \sigma(x,t), \quad \sigma(x,t) = \partial U(x,t) / \partial x \text{ – волновая функция деформации.} \quad (2)$$

Решение системы (1) будем искать методом Даламбера. Данный метод эффективно используется в задачах продольного соударения [2], поскольку позволяет наглядно анализировать волновые процессы. Как известно, в основе этого метода лежит представление о структуре решения в виде суммы двух волновых функций

$$V(x,t) = \phi(t - nx/c) + \varphi(t + nx/c), \quad (3)$$

где $\phi(t - nx/c)$ волновая функция, описывающая волну движущуюся в положительном направлении оси X (прямая волна), а $\varphi(t + nx/c)$ – в отрицательном направлении (обратная волна); n – единичный вектор направления движения волны; c – фазовая скорость упругой волны. Для решения системы (1) необходимо найти волновые функции, в зависимости от заданных начальных и граничных условий.

Рассматриваемые в работе упругие продольные волны в ДТТ представляют собой, так называемые, волны стационарного профиля [4]. В дальнейшем волновую функцию $U(x,t)$ считаем плоской волной вида $U(x,t) = uF_1(t - nx/c)$, где $F_1(t - nx/c)$ некоторая функция аргумента $(t - nx/c)$. Тогда, в соответствии с (1.2), для $V(x,t)$ и $T(x,t)$ получим:

$$V(x,t) = uF(t - nx/c), \quad T(x,t) = u_1 \omega F(t - nx/c), \quad (4)$$

где u – единичный вектор поляризации смещения (направление смещение сечений) [3]; $u_1 = -(u * n)$ – единичный коэффициент волновой функции напряжения; $\omega = (E/c)$ – удельное акустическое сопротивление среды.

Для удобства дальнейшего описания все упругие волны сжатия и разрежения стационарного профиля будем называть E -волнами. При этом конкретно волны сжатия и разрежения будем обозначать соответственно E и E^* . E -волны и E^* -волны будут отличаться тем, что единичные векторы u и n у первых имеют одно и тоже направление, а у вторых – противоположные направления.

2. Описание накопления E -волн в ДТТ при длительном воздействии постоянной силы на его поверхность. Ускоренное движение ДТТ, как результат осцилляции E -волн

Пусть на боковую поверхность (торец) свободного ДТТ (типа стержня) длиной l и с постоянным сечением S , расположенным вдоль оси OX , в положительном направлении оси OX действует постоянная сила $F(t)$ (рис.1)

$$F(t) = f F_0 [1 - H(t - \Delta t)], \quad (5)$$

где f – единичный вектор направления действия силы, (вектор поляризации смещения определяется данным вектором $u = f$); F_0 – амплитуда действующей силы; $H(t - \Delta t)$ – функция Хевисайда, $\Delta t \gg l/c$. (При этом смещение торца в месте приложения силы за время от 0 до l/c во много раз меньше самой длины ДТТ).

Начальные и граничные условия, соответственно:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x,0)=u(F_0/S\omega), \text{ при } x=0; V(x,0)=0, \text{ при } x>0, \\ T(x,0)=u_1(F_0/S), \text{ при } x=0; T(x,0)=0, \text{ при } x>0. \\ V(x,t)=u(F_0/S\omega), \text{ при } x=0; V(x,t)=2*V(x,t), \text{ при } x=1, \\ T(x,t)=-(u*n)(F_0/S), \text{ при } x=0; T(x,t)=0, \text{ при } x=1. \end{array} \right. \quad (6)$$

Для волновых функций $V(x,t)$ и $T(x,t)$, соответственно, запишем, так называемые, коэффициенты отражения и прохождения на границе двух стержней - формулы Френеля [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} O_V=(K-1)/(K+1), O_T=(1-K)/(K+1) - \text{коэффициенты отражения,} \\ P_V=2K/(K+1), P_T=2/(K+1) - \text{коэффициенты прохождения.} \end{array} \right. \quad (7)$$

Здесь $K=S_1*\omega_1/S_2*\omega_2$, где S_1, S_2 - постоянные (по длине) сечения, ω_1, ω_2 - удельные акустические сопротивления соответственно первого и второго ДТТ.

Напомним, что отражение волновых функций скорости $V(x,t)$ и напряжения $T(x,t)$ имеет особенности. Рассмотрим это на примере отражения E -волн от свободной поверхности: $S_2=0, \omega_2=0$ и $K \gg 1$ и учитывая (4,5) получаем:

$$O_V=1, O_T=-1, P_V=2, P_T=0, W_V=2, W_T=0; \\ V_{отр}(x,t)=O_V * V_{пад}(x,t)=V_{пад}(x,t), T_{отр}(x,t)=O_T * T_{пад}(x,t)=-T_{пад}(x,t).$$

Откуда следует, что если падающая волна является E -волной, то вектор поляризации u - при отражении от свободной поверхности не меняет своего направления, $u_{отр}=u_{пад}$, вектор n меняет направление на противоположное, т.е. $n_{отр}=-n_{пад}$. Соответственно в падающей E -волне $u_1=-(u*n)=-1$, а в отраженной $u_1=1$. Таким образом падающая E -волна, при отражении от свободной поверхности преобразовывается в отраженную E^* -волну, что хорошо известно. Для прохождения E -волны получаем:

$$V_{прох}(x,t)=W_V * V_{пад}(x,t)=2V_{пад}(x,t), T_{прох}(x,t)=W_T * T_{пад}(x,t)=0.$$

То есть суммарная волновая функция скорости на свободной поверхности, в момент отражения от нее E -волны имеет удвоенную величину, а напряжение равно нулю, что так же известно. Аналогично можно получить параметры отражения-прохождения для E^* -волн.

Далее рассмотрим решения системы (1) для нескольких периодов времени, изображенных на рис.1. Для удобства анализа процесса накопления волнового поля приняты следующие обозначения: E_1 - прямая волна сжатия, которая определена от момента времени $t=0$ и до момента $t=T/2$; E_1^* - обратная волна разрежения (как результат отражения прямой E_1 -волны сжатия от свободного левого торца стержня), она определена от момента времени $t=T/2$ и до момента $t=T$ (в дальнейшем в процессе осцилляции E_1 - и E_1^* -волны будут преобразовываться одна в другую при отражениях от торцов ДТТ), при этом

$$T=2*l/c. \quad (8)$$

Аналогично для соответствующих E_n -волн ($n=1,2,3,\dots,n$).

1. $T/2 > t > 0$. (Рис.1а-с). В течение этого периода времени, будет существовать только прямая E_1 -волна. В соответствии с (3) и с учётом начальных и граничных условий (6), получим для фазовых параметров E_1 -волны:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1(x,t)=u(F_0/S\omega) \{ 1 - H[(t-\Delta t)-(nx)/c] \}; \\ T_1(x,t)=u_1(F_0/S) \{ 1 - H[(t-\Delta t)-(nx)/c] \}, \end{array} \right. \quad (9)$$

За этот период в ДТТ будет сгенерирована E_1 -волна длиной l , при этом левый торец ДТТ имеющий постоянную скорость $V_1(0,t)$ в соответствии с (9) переместиться на расстояние

$$U(0,t) = \int_0^{T/2} V_1(0,t) dt = V_1(0,t) * (T/2) = (F_0/S\omega) * (T/2) = \Delta u. \quad (10)$$

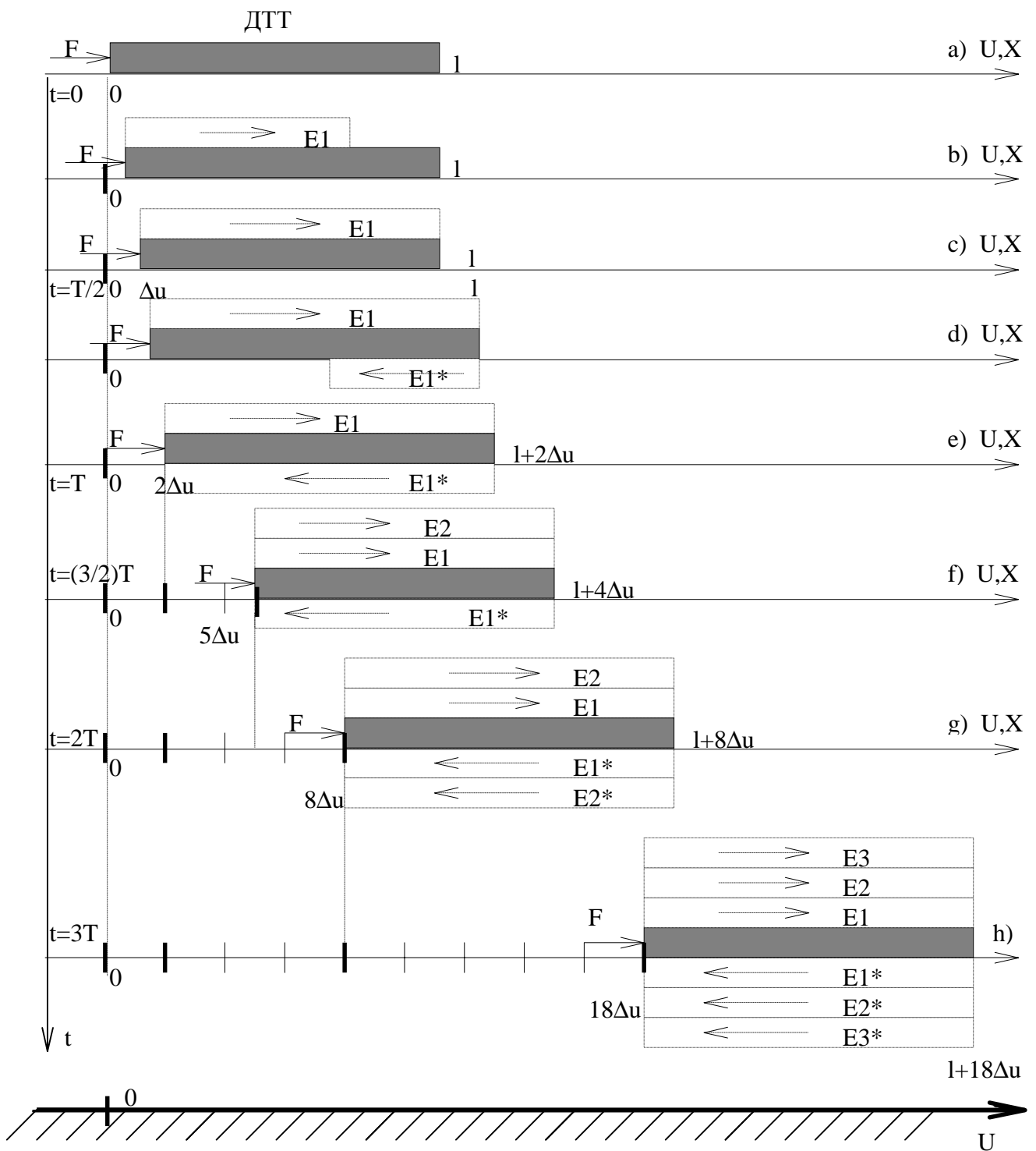


Рисунок 1 - Генерирование и накопление E -волн в ДТТ при длительном воздействии постоянной силы $F = \text{const}$ на его поверхность (торец) и движение ДТТ как результат осцилляции E -волн. (Для наглядности, смещения торца ДТТ сильно увеличены по сравнению с длиной стержня). Здесь E_1, E_2, E_3 и E_1^*, E_2^*, E_3^* - упругие волны сжатия и разрежения (соответственно) стационарного профиля длиной l .

$$\Delta U = \int_0^{T/2} V_1(0,t) dt$$

При этом заметим, что правый торец ДТТ еще не пришел в движение, так как еще не начался процесс отражения E1-волна. Длина ДТТ в момент времени $t=T/2$:

$$l(t=T/2) = U(x=1, t=T/2) - U(x=0, t=T/2) = (1) - (0 + \Delta u) = 1 - \Delta u.$$

2. $T \geq t > T/2$. (рис.1.(d-e)). В течение этого периода времени будет существовать прямая E1-волна и отраженная E1*-волна. В соответствии с (3,6) получим для фазовых параметров E1-волн:

$$\begin{cases} V(x,t) = u(F_0/S\omega) \{ 1 - H[(t-\Delta t) - (n_1 x)/c] \} + u(F_0/S\omega) \{ 1 - H[(t-\Delta t) - (2l + n_1 x)/c] \}; \\ T(x,t) = u_1(F_0/S) \{ 1 - H[(t-\Delta t) - (n_1 x)/c] \} + u_1(F_0/S) \{ 1 - H[(t-\Delta t) - (2l + n_1 x)/c] \}, \end{cases} \quad (11)$$

где n_1 -единичный вектор прямой E1-волны, n_1^* -единичный вектор обратной E1*-волны, $u_1 = -u_1$ единичный коэффициент волновой функции напряжения обратной E1*-волны.

Откуда получаем, что в сечениях ДТТ, где происходит наложения прямой E1-волны и обратной E1*-волны волновая функция напряжения равна нулю, а волновая функция скорости равна сумме волновых функций скорости прямой и обратной волн.

2.1. Левый торец ДТТ в течение периода времени $T \geq t > T/2$ будет продолжать двигаться с постоянной скоростью $V_1(0,t)$ и переместится на такое же расстояние, как и за первый полупериод

$$U(0,t) = V_1(0,t) * t = (F_0/S\omega) * (T/2) = \Delta u.$$

За время от $t=0$ до $t=T$ левый торец ДТТ переместится на расстояние

$$U(0, T \geq t > 0) = U(0, T/2 \geq t > 0) + U(0, T \geq t > T/2) = \Delta u + \Delta u = 2\Delta u.$$

2.2. С момента $t > T/2$ начнется процесс отражения E1-волны от правого торца ДТТ. В соответствии с (6,11) получим для отраженных от свободной поверхности волновых функций скорости и напряжения

$$\begin{aligned} V_1^*(x,t) &= u(F_0/S\omega) \{ 1 - H[(t-\Delta t) - (2l + n_1 x)/c] \}, \\ T_1^*(x,t) &= u_1(F_0/S) \{ 1 - H[(t-\Delta t) - (2l + n_1 x)/c] \}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для $x=l$, учитывая (6) получим

$$V_1^*(l,t) = O_V * V_1(l,t) = V_1(l,t); \quad T_1^*(l,t) = O_T * T_1(l,t) = -T_1(l,t).$$

Далее, используя (6), определим прохождение волновых функций скорости и напряжения на свободной поверхности – правом торце стержня

$V_{1\text{прох}}(l,t) = P_V * V_{1\text{пад}}(l,t) = 2 * V_{1\text{пад}}(l,t)$, $T_{1\text{прох}}(l,t) = P_T * T_{1\text{пад}}(l,t) = 0$. Полученную удвоенную скорость $V_{1\text{прох}}(l,t) = 2 * V_{1\text{пад}}(l,t)$ на свободной поверхности, еще называют «массовой удвоенной скоростью» [5].

За время от $t=0$ до $t=T$ правый торец ДТТ переместится на расстояние

$$U(l, T \geq t > 0) = U(l, T/2 \geq t > 0) + U(l, T \geq t > T/2) = 0 + 2\Delta u = 2\Delta u.$$

Длина ДТТ в момент $t=T$ будет равна

$$l(t=T) = U(x=1, t=T) - U(x=0, t=T) = (1 + 2\Delta u) - (0 + 2\Delta u) = 1.$$

3.(3/2) $T \geq t > T$. (рис.1(e-f)). (Здесь и далее мы не приводим общее решение из-за громоздкости, однако, процесс формирования общего решения и соответствующая картина волнового поля проиллюстрированы на рис.1. В этот период времени под действием постоянной силы $F(t)$ будет происходить генерирование E2-волны, и в тоже время от левого торца начнется процесс отражения E1*-волны разрежения. В итоге полная скорость движения левого торца будет равна сумме этих двух скоростей. На правом торце будет происходить процесс отражения E1-волны, как и в течение периода

$T \geq t > T/2$. Запишем, в соответствии с (6) отраженные и проходящие волновые функции $E1$ -волны при отражении от свободной поверхности левого торца ДТТ:

$$\begin{aligned} V1_{отр}(l,t) &= O_V * V1_{пад}(l,t) = V1_{пад}(l,t), & T1_{отр}(l,t) &= O_T * T1_{пад}(l,t) = -T1_{пад}(l,t) \\ V1_{прох}(l,t) &= P_V * V1_{пад}(l,t) = 2 * V1_{пад}(l,t), & T1_{прох}(l,t) &= P_T * T1_{пад}(l,t) = 0. \end{aligned}$$

Скорость движения левого торца за этот период будет постоянна и равна

$$V1(0, (3/2)T \geq t > T) = V1_{прох}(0,t) + V2(0,t) = 3V1(0,t), \text{ где } V2(0,t) = V1(0,t).$$

В итоге за время от $t=T$ до $t=(3/2)T$ левый и правый торцы ДТТ, соответственно, переместятся на расстояние

$$\begin{aligned} U(0, (3/2)T \geq t > 0) &= U(0, T/2 \geq t > 0) + U(0, T \geq t > T/2) + \\ &+ U(0, (3/2)T \geq t > T) = \Delta u + \Delta u + 3\Delta u = 5\Delta u; \\ U(1, 3/2T \geq t > 0) &= U(1, T/2 \geq t > 0) + U(1, T \geq t > T/2) + \\ &+ U(1, (3/2)T \geq t > T) = 0 + 2\Delta u + 2\Delta u = 4\Delta u. \end{aligned}$$

Длина ДТТ в момент $t=3/2T$ будет равна

$$l(t=T) = U(x=1, t=3/2T) - U(x=0, t=3/2T) = (1+4\Delta u) - (0+5\Delta u) = 1 - \Delta u.$$

4. $2T \geq t > (3/2)T$. (рис.1(f-g)). В этот период времени под действием постоянной силы $F(t)$ на левом торце ДТТ будет продолжаться процесс генерирования $E2$ -волны. Скорость движения левого торца будет соответствовать скорости в течение периода $(3/2)T \geq t > T$. От правого торца будет продолжаться процесс отражения $E1$ -волны и начнется процесс отражения $E2$ -волны. Отраженные и проходящие волновые функции $E1^*$ -волны при отражении от свободной поверхности левого торца ДТТ:

$$\begin{aligned} V1_{отр}(l,t) &= O_V * V1_{пад}(l,t) = V1_{пад}(l,t), & T1_{отр}(l,t) &= O_T * T1_{пад}(l,t) = -T1_{пад}(l,t), \\ V1_{прох}(l,t) &= P_V * V1_{пад}(l,t) = 2 * V1_{пад}(l,t), & T1_{прох}(l,t) &= P_T * T1_{пад}(l,t) = 0. \end{aligned}$$

Отраженные и проходящие волновые функции $E1$ - и $E2$ -волны при отражении от свободной поверхности правого торца ДТТ:

$$\begin{aligned} V1^*(l,t) &= O_V * V1(l,t) = V1(l,t); & T1^*(l,t) &= O_T * T1(l,t) = -T1(l,t). \\ V2^*(l,t) &= O_V * V2(l,t) = V2(l,t); & T2^*(l,t) &= O_T * T2(l,t) = -T2(l,t). \\ V1_{прох}(l,t) &= P_V * V1_{пад}(l,t) = 2 * V1_{пад}(l,t), & T1_{прох}(l,t) &= P_T * T1_{пад}(l,t) = 0. \\ V2_{прох}(l,t) &= P_V * V2_{пад}(l,t) = 2 * V2_{пад}(l,t), & T2_{прох}(l,t) &= P_T * T2_{пад}(l,t) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, скорость движения левого и, соответственно, правого торцов за рассматриваемый период будут постоянны и равны

$$\begin{aligned} V(0, 2T \geq t > 3/2T) &= V1_{прох}(0,t) + V2(0,t) = 3V(0,t), \\ V(1, 2T \geq t > 3/2T) &= V1_{прох}(0,t) + V2_{прох}(0,t) = 4V(0,t). \end{aligned}$$

В итоге за время от $t=0$ до $t=2T$ левый торец ДТТ переместился на расстояние:

$$\begin{aligned} U(0, (3/2)T \geq t > 0) &= U(0, T/2 \geq t > 0) + U(0, T \geq t > T/2) + \\ &+ U(0, (3/2)T \geq t > T) + U(0, 2T \geq t > 3/2T) = \Delta u + \Delta u + 3\Delta u + 3\Delta u = 8\Delta u, \end{aligned}$$

а правый торец на расстояние:

$$\begin{aligned} U(1, 3/2T \geq t > 0) &= U(1, T/2 \geq t > 0) + U(1, T \geq t > T/2) + \\ &+ U(1, (3/2)T \geq t > T) + U(1, 2T \geq t > 3/2T) = 0 + 2\Delta u + 2\Delta u + 4\Delta u = 8\Delta u. \end{aligned}$$

Длина ДТТ в момент $t=2T$ будет равна

$$I(t=T) = U(x=1, t=3/2T) - U(x=0, t=3/2T) = (1+8\Delta u) - (0+8\Delta u) = 1.$$

Для времени $t=3T$ картина волнового поля с E_3 - и E_3^* -волнами изображена на рис.1h. При продолжении воздействия силы $F(t)$ на торец стержня будет так же продолжаться процесс генерирования и дальнейшей осцилляции E_n - и E_n^* -волн ($n=4,5,6,\dots$). Исходя из описанных и проиллюстрированных на рис.1 закономерностей генерирования волнового поля силой $F(t)$ видим, что скорость любого сечения и, соответственно, волновая функция плотности импульса в ДТТ нарастают не непрерывно, а дискретно с периодом T (рис.2). Исходя из выше описанного, легко получить, что скорость движения сечения $x=0$ будет определяться выражением

$$V_k(0, t_k) = (2k-1) V(0, t_1), \quad k=1, 2, 3, \dots; \quad t_k = kT. \quad (13)$$

Ипульс и, соответственно, кинетическая и потенциальная энергии, перносимые E -волнами [1,3]

$$P_E(t) = \rho S \int_0^l \sum_k (V_k(x, t) + V_k^*(x, t)) dx,$$

$$W_E^k(t) = (P(t))^2 / 2m, \quad W_E^n(t) = (m/2l\omega^2) \int_0^l [\sum_k (T_k(x, t) + T_k^*(x, t))]^2 dx,$$

где $W_E^k(t)$, $W_E^n(t)$ - полные кинетическая и потенциальная энергии упругой волны.

Отметим, что работа затраченная на генерирование каждой следующей волны E_n будет увеличиваться. При этом, как показано в [3] работа силы $F(t)$ равна $A = \int_0^t F(t) [\sum_i (V_i(0, t))] dt$ и равна сумме $(W_E^k(t) + W_E^n(t))$, а полный импульс, сообщенный силой $F(t)$, равен $P_E(t)$ и равен классическому импульсу движения всего ДТТ, рассчитываемому когда ДТТ рассматривается как точечное тело массой равной массе ДТТ.

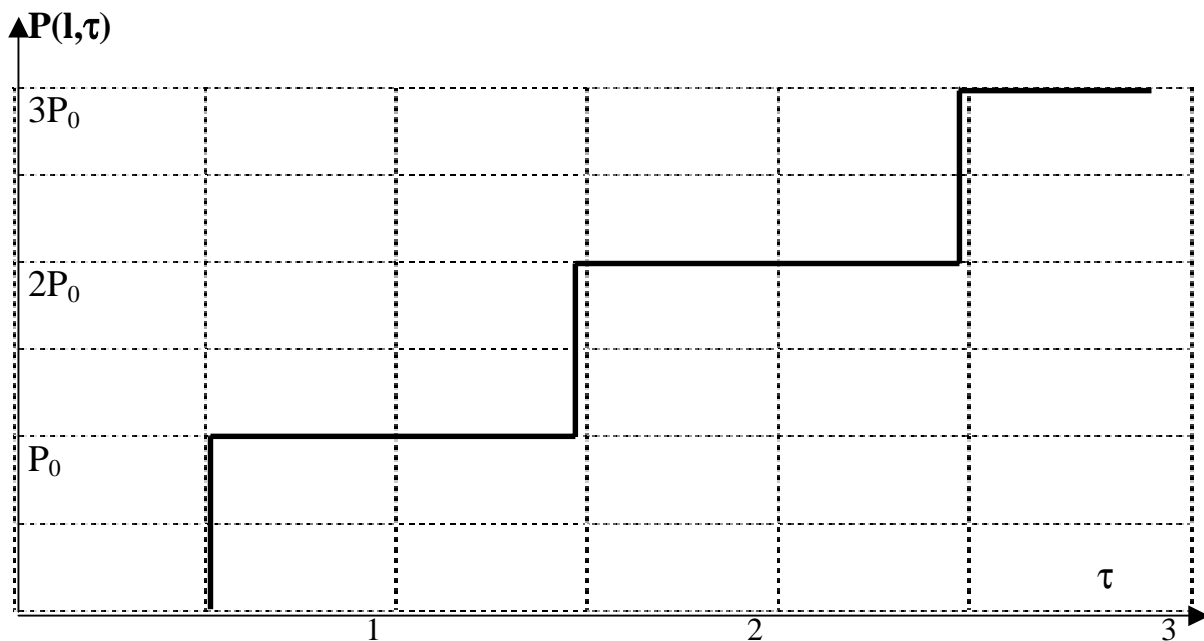


Рисунок 2 - График изменения волновой функции плотности импульса для правого торца (сечение $x=l$) ДТТ при воздействии постоянной силы на боковую поверхность (левый торец). $P_0 = \rho * 2V_1(0, t)$, $\tau = t/T$, $T = 2l/c$, где $V_1(0, t)$ - скорость сечения $x=0$ при $t < T$

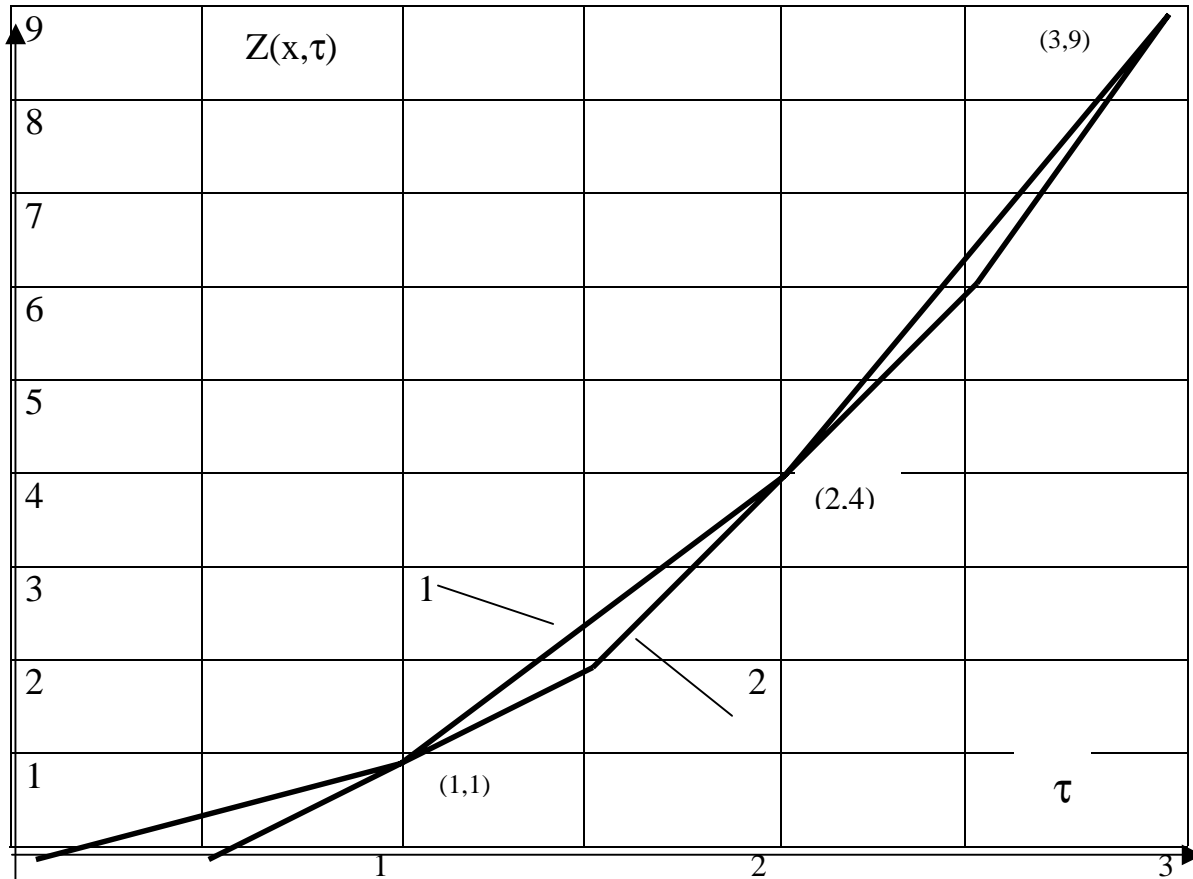


Рисунок 3 - Графики движения 1- левого (сечение $x=0$) и 2- правого торца (сечение $x=l$) ДТТ при воздействии постоянной силы на боковую поверхность (левый торец). $Z=U(\tau)/2\Delta U$, $\tau=t/T$, $T=2l/c$. $\Delta U=(T/2)*V_1(0,t)$, где $V_1(0,t)$ -скорость сечения $x=0$ при $t<T$

Сечение $x=0$. Далее определим функциональную зависимость, описывающую расстояние, проходимое сечением $x=0$ от времени t_k .

$$U(0,t_k)=1T V_1(0,t_1) + 3T V_1(0,t_1)+\dots+(2k-1) T V_1(0,t_1), \text{ или}$$

$$U(0,t_k)=T V_1(0,t_1)[1+3+\dots+(2k-1)]= T V_1(0,t_1)\sum(2k-1).$$

Сумма числового ряда стоящего в квадратных скобках, как известно равна k^2 , тогда

$$U(0,t_k)= T V_1(0,t_1) k^2= (2V_1(0,t_1)/T) (Tt_k)^2/2= (2V_1(0,t_1)/T) (t_k)^2/2 = (a t_k^2)/2. \tag{14}$$

Мы получили известное уравнение, получаемое из второго закона динамики и описывающее движение тела с ускорением a , где

$$a=(2V_1(0,t_1)/T)=(2F_0/S\omega)/T=(2F_0/Sp_c)/(2l/c)=(F_0/m). \tag{15}$$

Данное уравнение справедливо только в моменты времени $t_k=kT$. Для моментов времени между T_k и $T(k+1)$ скорость движения сечения $x=0$ будет постоянной и определяться выражением (13).

Сечение $x=l$. Функция, описывающая расстояние, проходимое сечением $x=l$ от времени будет представлять собой ряд

